数学の知識1　「線形常数の比と対数の関係」

指数と対数　$y = a^x$, $\longleftrightarrow x = \log_a y$

積和の関係　$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a x^y = y \log_a x$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

底の変換　$\log_a x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$　　$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

dB: $A(dB) = 10\log_{10} x$

処理の過程で増えたり減ったりする値を単位1に対する大きさ（比）を足し算で表す手法
特徴的な値　-3dB約半分、+3dB約倍、-1dB約80％、+1dB約1.25倍：これを利用するとほとんどの比（dB）を暗算でも倍率に換算できる。

dBm:　$A(dBm) = 10\log_{10} x(mW)$

x(W)の電力を基準（0dB）を1mWにおいて、電力／パワーの大きさをdBで表す手法

数学の知識2　「周期関数のフーリエ級数展開からフーリエ変換へ」の拡張

1.複素関数と三角関数の関係：「オーラーの公式」

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$　が成り立つ。

足し算/引き算して三角関数でまとめると

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

とも表せる←フーリエ展開で活用！

2. ベクトルの内積

$< \vec{A}, \vec{i} >, < \vec{A}, \vec{j} >, < \vec{A}, \vec{k} >$

周期関数　$f(t) = f(t+T)$

奇関数　$f(-t) = -f(t)$

偶関数　$f(-t) = f(t)$

周期関数の内積

$$< f_1, f_2 > \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \bullet f_2(t)dt$$

部分積分

$$\int f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right] - \int f'(t)g(t)dt \quad f(t)g'(t) = \begin{cases} t\cos\omega t \\ or \\ t\sin\omega t \end{cases}$$

3.フーリエの仮定

「基本周期Tの任意の波形の周期関数は、周期T/nの三角関数の無限級数で表現できる」

→それではどんな係数の級数となる？　例：奇関数　$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \left(\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}\right)$

内積の計算結果より $b_n = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{-T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 tdt$ 同様に偶関数　$a_n = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 tdt$

バイアス（全領域に渡って振動の中心レベル0でない）は偶関数の0次$\dfrac{a_0}{2}$で表すと

一般の周期関数は以下の様に周期的奇関数と偶関数の組み合わせで表せる

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

フーリエ級数展開

ただし　$\mathrm{a}_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \times 1dt$

$\mathrm{a}_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega tdt (n = 1,2,3,...)$　$\mathrm{b}_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega tdt (n = 1,2,3,...)$

で表すことができる。

4.パーシバルの定理 $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}\{\mathrm{f(t)}\}^2\mathrm{dt} = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$

5. フーリエ級数展開：オイラーの公式を用いるとeに統一して表すことができる
（微積分変換で互いの関係を表すときに都合が良い） 複素フーリエ級数展開

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{jn\omega t})$$ ただし c_n は $$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}dt$$ (n=0, ±1, ±2, . . .)

6. 繰り返し周期Tを∞まで拡張し、Σを∮にするとあらゆる波形を同様に表現できる。
「フーリエ変換 」→「角周波数ωと時間t変化」のスペクトル（成分分布）の関係式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

数学と通信の知識1 信号電力とS／N、ベッセル関数

1. 信号電力：AM変調 $f_{AM} = A_c(1 + m\cos pt)\cos\omega_c t = A_c\cos\omega_c t + \frac{mA_c}{2}\left\{\cos(\omega_c + p)t + \cos(\omega_c - p)t\right\}$

$$P_{AM} = P_c + 2P_s = \frac{A_c{}^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

信号電力キャリア信号の変調度mで変化する

DSB, SSBではキャリア信号を削減するので $P_{DSB} = 2P_s = \frac{A_c{}^2}{4}$ $P_{SSB} = P_s = \frac{A_c{}^2}{8}$

2. S/N：変調度mのAM信号送信では $\left(\frac{S}{N}\right)_{in,AM} = \frac{(2+m^2)}{4N}A_c{}^2$ 包絡線検波後の $\left(\frac{S}{N}\right)_{out,AM} = \frac{A_c^2 m^2}{4N}$

S/N良い同期検波 DSBでは $\left(\frac{S}{N}\right)_{out,DSB} = \frac{A_c^2}{2N}$ SSBでは $\left(\frac{S}{N}\right)_{out,SSB} = \frac{A_c^2}{4N}$ （S/N悪いが電力も小さい）

3. FM変調： $f_{FM}(t) = A_c\cos\left\{\omega_c t + \theta_c + k_f\int_{-\infty}^{t} s(t)dt\right\} = A_c\cos\left\{\omega_c t + m_f\sin pt\right\}$ ただし $m_f = \frac{k_f A_s}{f_s} = \frac{\Delta\omega}{\omega_s}$

ベッセル関数：FMやPM変調に用いられる様に三角関数の内部に変調項がある場合はそのフーリエ級数展開の係数は以下のベッセル関数の和で表される

$\cos(m_F\sin pt) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_F)\cos npt$ 同様に $\sin(m_F\sin pt) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_F)\sin npt$

パーシバルの定理より全電力はベッセル関数（確率関数で次乗和=1）係数の2乗和なので

$P = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}\{\mathrm{v_{FM}}\}^2\mathrm{dt} = \frac{A^2}{2}\left[J_0{}^2(m_f) + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_n{}^2(m_f)\right] = \frac{A^2}{2}$ となり「FMの信号電力は変調によらず一定」

4. カーソンの法則：狭帯域変調ではベッセル関数の±1次までを考慮すれば良くB=2fs
m次まで関係する変調指数 m_f が大きい（>1）広帯域FM変調では帯域B=2（m_f+1）fs

5. S/N： m_f が大きい（>1）のときの $\left(\frac{S}{N}\right)_{out,FM} = \frac{A_c{}^2/2}{N_0} = \frac{3Bk_f{}^2A^2{}_c}{8\pi^2 f_s^2}\left(\frac{A^2{}_c}{2N}\right) = 3m_f{}^2(m_f + 1)\left(\frac{C}{N}\right)$

数学と通信の知識2 アナログ信号の量子化と雑音電力

1.サンプリング周波数f(Hz)、信号全振幅V, 量子化ステップn(bit) $s = \frac{V}{2^n}$ 、データレート=fn(bit/s)

2.量子化雑音電力 $N_Q = \sum_{i=1}^{n} p_i\int_{y_i}^{y_i+s}\{y - (y_i + \frac{s}{2})\}^2 dy = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{s^3}{12} = \frac{s^2}{12}$ $N_Q = \frac{V^2}{12\times 2^{2n}}$ これをdBで表すと？